Lycée : Habib Thamer

Classe : 2ème Science.

Série d'exercices n° 8 (Suites réelles)

Exercice 1 :

On considère la suite (U_n) définie par la donnée d'un terme initial entier U_0 et par le procédé suivant :

- Si U_n est pair, $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n$;
- Si U_n est impair, $U_{n+1} = 3U_n + 1$.

Calculer les dix premiers termes de la suite dans les cas suivants : a) $U_0 = 16$; b) $U_0 = 13$;

Exercice 2 :

Pour chacune des suites définies ci-dessous :

1) Donner les quatre premiers termes ;
2) Ecrire la relation liant U_4 à U_3 et celle liant U_n à U_{n-1}.

a) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = U_n + n \end{cases}$ b) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2^n} \end{cases}$

Exercice 3 :

Montrer que la suite définie, pour tout entier naturel n, par $U_n = n2^n$ vérifie la relation de récurrence : $U_{n+2} = 4(U_{n+1} - U_n)$

Exercice 4 :

On considère la suite (U_n) définie par son premier terme $U_0 = 5$ et la relation de récurrence : $U_{n+1} = 6 - \frac{2U_n}{3}$

Après avoir tracé la droite D : $y = 6 - \frac{2}{3}x$ et la droite Δ d'équation $y = x$, construire les premiers termes de la suite (U_n).

Exercice 5 :

La suite (U_n) est arithmétique. On sait que : $U_9 + U_{11} = -134$ et $U_5 + U_7 + U_9 = -138$

Déterminer le terme U_0 et la raison r de la suite (U_n)

Exercice 1 :

Déterminer les suites arithmétiques (U_n) qui vérifient : $U_1 + U_5 = 0$ et $U_2^2 + U_3^2 = 16$

On précisera le terme initial et la raison de telles suites, s'il en existe.

Exercice 6 :

On suppose que a, b et c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Déterminer ces nombres sachant que : $a + b + c = 120$ et $abc = 59160$

Exercice 7 :

On considère la suite (V_n) définie par : $V_n = \frac{3n+2}{n+4}$

1)Calculer V_0, V_1, V_2, V_{46} et V_{96}

2)Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $\frac{1}{2} \le V_n < 3$

Exercice 8 :

Soit (W_n) une suite arithmétique de premier terme W_0 et de raison r.

1) Sachant que $W_5 = 11$ et $W_8 = 41$; calculer r et W_0
2) Sachant que $r = -3$; $W_1 = 6$ et $\sum_{k=0}^{n} W_k = -90$.

Calculer n

Exercice 9 :

Soit la suite $(U_n)_{n \in IN^*}$ tel que : $\sum_{k=1}^{n} U_k = \frac{1}{2}(3n^2 + 2n)$

1) Calculer les cinq premiers termes de cette suite(U_n)
2) Calculer U_n en fonction de n. En déduire que (U_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison.

Exercice 10 :

Soit la suite (V_n) définie par : $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{V_n}{1+V_n} \ ; n \in IN. \end{cases}$

1) Calculer V_1, V_2 et V_3.Que peut on conclure ?
2) On pose $U_n = \frac{1}{V_n}$ Calculer U_0, U_1 et U_2.

Montrer que (U_n) est une suite arithmétique.

3) Exprimer U_n en fonction de n.

En déduire l'expression de V_n en fonction de n. Retrouver alors V_3.

Exercice 11 :

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = -5 \\ U_{n+1} = \frac{25}{10 - U_n} \ ; n \in IN. \end{cases}$

1) Vérifier que (U_n) n'est pas une suite arithmétique
2) Soit la suite (V_n) définie sur IN par : $V_n = \frac{1}{U_n - 5}$

   a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique

   b) Exprimer V_n en fonction de n.
3) Déterminer un entier naturel n_0 tel que : si $n \in IN$ et $n \ge n_0$ alors $|U_n - 5| < 10^{-3}$

Exercice 12 :

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_n = U_{n-1} + n(-1)^{n-1} \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in IN : U_{n+2} = U_n - (-1)^n$.
2) On considère les suites (V_p) et (W_p) telles que $\forall p \in IN^*$: $V_p = U_{2p-1}$; $W_p = U_{2p}$.

   a) Montrer que W est une suite arithmétique.

   b) Exprimer W_p en fonction de p.
3) a) Montrer que $\forall n \in IN^*$: $V_n + W_n$ = constante.

   b) En déduire la somme $S = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

Exercice 13 :

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{-1+3U_n}{1+U_n} \ ; n \in IN \end{cases}$

1) Montrer que la suite (U_n) n'est pas arithmétique.
2) Soit la suite (V_n) définie sur IN par $V_n = \frac{1+U_n}{-1+U_n}$.

   a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.

   b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

   c) Calculer en fonction de n les somme suivantes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k \quad ; \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{-2}{-1+U_k}.$$

Exercice 14 :

Soit $a \in IR$ montrer que $A = (a^2 - 2a - 1)^2$; $B\ (a^2 + 1)^2$ et $C = (a^2 + 2a - 1)^2$ sont 3 termes consécutifs d'une suite arithmétiques

Exercice 15 :

(U_n) est une suite arithmétique de raison r, et on pose : Pour tout entier n, $V_n = 2^{U_n}$.
Quelle est la nature de la suite (V_n) ?

Exercice 16 :

a) Existe-t-il des suites géométriques dont les premier et troisième terme sont égaux ?
Quelles sont les valeurs possibles pour leur raison ?
b) Même question avec l'égalité des premier et neuvième termes.

Exercice 17 :

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 2$.

1) Préciser les cinq premiers termes de la suite (U_n).
2) Démontrer que (U_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
3) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n + 3$.
Démontrer que (V_n) est géométrique.
4) En déduire le terme général de U_n. Préciser la valeur exacte des termes U_7 et U_8, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice 18 :

On considère la suite (U_n) définie par ; $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{5U_n - 1}{4U_n + 1}$

1) Calculer U_1, U_2 et U_3. En déduire que (U_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{1}{U_n - \frac{1}{2}}$.
   a) Démontrer que (V_n) est une suite arithmétique.
   b) Préciser le terme général pour le calcul de V_n.
3) En déduire le terme général pour le calcul de U_n.

Exercice 19 :

Calculer les sommes suivantes :

a) $S = 2 + 4 + 8 + \ldots + 256$ c) $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots - \frac{1}{256}$

b) $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{128}$ d) $S = 1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \ldots + 10^{-7}$

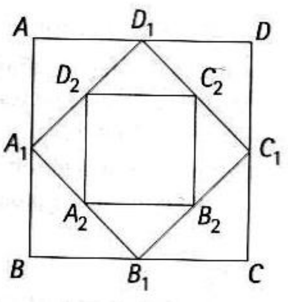
Exercice 20 :

Résoudre dans IR l'équation :

$$1 + \frac{x}{x+2} + \left(\frac{x}{x+2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x}{x+2}\right)^7 = 0$$

Exercice 21 :

1) Démontrer que les milieux des côtés d'un carré forment un carré.
2) On construit une suite de « carrés emboîtés » à partir des milieux des côtés du carré précédent. Le carré initial ABCD a pour côté c.



   a) On appelle ℓ_n le périmètre du carré $A_nB_nC_nD_n$.
Quelle est la nature de la suite (ℓ_n) ? Déterminer le terme général ℓ_n
   b) Même question pour la suite (a_n) des aires des carrés $A_nB_nC_nD_n$.

Exercice 22 :

Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite géométrique, à termes positifs, de raison q. On pose $U_3 = a$ ($a \in IR_+^*$) ; $S = U_1 + U_5$; $T = U_2 + U_4$

1) Montrer que $T^2 = a.S + 2a^2$
2) Calculer a et q sachant que $T = 20$ et $S = \frac{164}{3}$.
3) Exprimer U_n en fonction de n.

Exercice 23 :

I/ 1) Soit X la suite arithmétique telle que $X_{10} = 29$ et $X_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} = 154$
   a) Calculer X_0 et la raison r de la suite X.
   b) Exprimer X_n en fonction de n.
2) Soit Y la suite géométrique telle que $Y_1Y_2 = 8$ et $Y_3Y_5 = 256$
   a) Calculer Y_0 et la raison q de cette suite.
   b) Exprimer Y_n en fonction de n.

II/ On considère les deux suites U et V définies sur IN par

$$U_n = \frac{2^n + 3n - 1}{2} \text{ et } V_n = \frac{2^n - 3n + 1}{2}$$

1) Calculer U_0 ; U_1 et U_2 et V_0 ; V_1 et V_2.
2) Soit la suite $(a_n)_{n \in IN}$ définie par $a_n = U_n - V_n$
   a) Montrer que (a_n) est une suite arithmétique.
   b) Calculer la somme $S = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$
3) Soit la suite $(b_n)_{n \in IN}$ définie par $b_n = U_n + V_n$
   a) Montrer que (b_n) est une suite géométrique.
   b) Calculer la somme $S' = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{10}$
4) Soit $S_1 = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{10}$ et $S_2 = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots + V_{10}$
   a) Vérifier que $S = S_1 - S_2$ et $S' = S_1 + S_2$.
   b) En déduire S_1 et S_2.